

Perkalian Vektor Tiga Dimensi Menggunakan Delta Kronecker dan Simbol Levi-Civita

M. Abu Kamal¹, Fitriya S²

¹Program Studi Teknologi Informasi, Fakultas Teknik, Universitas Annuqayah, Sumenep, Indonesia

²Program Studi Teknik Sipil, Fakultas Teknik, Universitas Annuqayah, Sumenep, Indonesia

Article Info

Article history:

Received June 22, 2026

Revised July 11, 2026

Accepted July 22, 2026

Keywords:

perkalian titik
Perkalian silang
delta Kronecker
simbol Levi-Civita
notasi indeks

ABSTRAK

Telah dilakukan verifikasi hasil perkalian vektor dalam ruang tiga dimensi dengan notasi indeks yang melibatkan delta kronecker dan simbol Levi-Civita. Hasil kajian menunjukkan bahwa Hasil perkalian vektor dalam notasi indeks dengan memanfaatkan delta kronecker dan simbol Levi-Civita sama dengan hasil perkalian vektor dengan metode pengurain komponen vektor. Hanya saja, dengan menggunakan notasi indeks memberikan formulasi yang lebih ringkas, konsisten, dan umum, serta mampu menyederhanakan manipulasi matematis pada operasi vektor. Pendekatan ini diharapkan dapat menjadi alternatif representasi matematis yang efektif dalam pembelajaran.

Corresponding Author:

M. Abu Kamal

Program Studi Teknologi Informasi, Fakultas Teknik, Universitas Annuqayah Jl Bukit Lancaran Pondok Pesantren Annuqayah Sumenep, Indonesia

Email: akmal09kasya@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Vektor merupakan entitas matematis yang dicirikan oleh besar dan arah, serta memiliki peranan yang sangat mendasar dalam perumusan hukum-hukum fisika. Berbagai besaran fisis, seperti perpindahan $\vec{r}$, kecepatan $\vec{v}$, momentum $\vec{p}$, dan gaya $\vec{F}$, secara alami direpresentasikan sebagai vektor. Dalam kajian elektromagnetisme, medan listrik $\vec{E}$ dan medan magnet $\vec{B}$ juga merupakan medan vektor yang memenuhi persamaan Maxwell. Dengan menggunakan vektor, hukum-hukum fisika dapat diformulasikan secara ringkas dan invariant terhadap perubahan sistem koordinat, sehingga memudahkan analisis fenomena fisis secara umum [1,2,6].

Dalam sistem koordinat Kartesius tiga dimensi, suatu vektor ($\vec{A}$) dapat dinyatakan sebagai

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (1)$$

dengan A_x , A_y , dan A_z disebut komponen vektor $\vec{A}$, sedangkan $\hat{i}$, $\hat{j}$, dan $\hat{k}$ disebut vektor satuan (vektor basis). Representasi komponen ini merupakan bentuk yang paling umum digunakan dalam literatur fisika dan matematika terapan karena kesederhanaannya dalam perhitungan analitik maupun numerik [1,3,5].

Persamaan (1) dapat ditulis dalam bentuk

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i \quad (2)$$

dan secara umum, notasi ini dapat diperluas untuk ruang berdimensi n dengan indeks yang berjalan dari 1 hingga n . Bentuk representasi ini berlaku untuk berbagai sistem koordinat, di mana perbedaan antar sistem hanya terletak pada komponen vektor dan basis yang digunakan. Penulisan vektor dalam bentuk perkalian komponen dan basis seperti pada persamaan (2) dapat dibuat lebih singkat dengan menghapus tanda notasi sigma

$$\vec{A} = A_i \hat{e}_i \quad (3)$$

yang dikenal sebagai notasi penjumlahan Einstein. Dalam notasi ini, setiap indeks yang muncul berulang secara implisit dijumlahkan. Indeks tersebut bersifat dummy dan dapat diganti dengan simbol lain tanpa mengubah makna fisik persamaan [4,8,9].

Perkalian antara dua vektor atau lebih dibedakan menjadi dua jenis utama, yaitu perkalian skalar (*dot product*) dan perkalian silang (*cross product*). Perkalian skalar dua vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ didefinisikan sebagai

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha \quad (4)$$

dengan α adalah sudut apit antara vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$. Persamaan (4) dapat dihitung dengan cara mengalikan setiap komponen vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ sebagaimana persamaan (1)

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= A_x B_x (\hat{i} \cdot \hat{i}) + A_x B_y (\hat{i} \cdot \hat{j}) + A_x B_z (\hat{i} \cdot \hat{k}) + A_y B_x (\hat{j} \cdot \hat{i}) + A_y B_y (\hat{j} \cdot \hat{j}) + A_y B_z (\hat{j} \cdot \hat{k}) \\ &\quad + A_z B_x (\hat{k} \cdot \hat{i}) + A_z B_y (\hat{k} \cdot \hat{j}) + A_z B_z (\hat{k} \cdot \hat{k}) \end{aligned} \quad (5)$$

Perkalian titik dari dua vektor basis memenuhi $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$, sedangkan $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{k} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = 0$, sehingga persamaan (5) menjadi

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Sementara itu, perkalian silang dua vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ didefinisikan sebagai

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \alpha \quad (6)$$

yang menghasilkan sebuah vektor baru yang arahnya tegak lurus terhadap bidang yang dibentuk oleh $\vec{A}$ dan $\vec{B}$. Dengan menggunakan basis Kartesius, operasi ini dapat dievaluasi melalui komponen-komponen vektor

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= A_x B_x (\hat{i} \times \hat{i}) + A_x B_y (\hat{i} \times \hat{j}) + A_x B_z (\hat{i} \times \hat{k}) + A_y B_x (\hat{j} \times \hat{i}) + A_y B_y (\hat{j} \times \hat{j}) + A_y B_z (\hat{j} \times \hat{k}) \\ &\quad + A_z B_x (\hat{k} \times \hat{i}) + A_z B_y (\hat{k} \times \hat{j}) + A_z B_z (\hat{k} \times \hat{k}) \end{aligned} \quad (7)$$

karena perkalian silang dari dua vektor basis memenuhi $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$, $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$, $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$, $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$, $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$, $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$, $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$, maka persamaan (7) menjadi

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$

Meskipun metode berbasis komponen ini sangat umum digunakan, pendekatan tersebut memiliki keterbatasan. Perhitungan sering menjadi panjang dan kurang efisien, khususnya untuk ekspresi yang melibatkan banyak vektor atau operasi berulang. Selain itu, ketergantungan yang kuat pada sistem koordinat tertentu dapat menyamarkan sifat geometrik dan simetri fisis dari permasalahan yang dikaji [3,5].

Dengan menggunakan notasi indeks, hasil kali titik dua buah vektor pada persamaan (5) ditulis

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i \hat{e}_i \cdot B_j \hat{e}_j = A_i B_j (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j) \quad (8)$$

dengan

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

δ_{ij} disebut delta Kronecker yang berperan sebagai operator identitas dalam ruang vektor dan bersifat simetris. Sehingga persamaan (8) menjadi

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i A_i = A_j A_j \quad (9)$$

Ekspresi ini menunjukkan bahwa hasil kali titik merupakan kontraksi indeks yang menghasilkan besaran skalar yang invarian terhadap rotasi sistem koordinat [7,10,11].

Dalam notasi indeks, perkalian silang dua vektor pada persamaan (7) dapat dituliskan sebagai

$$\vec{A} \times \vec{B} = A_i e_i \times B_j e_j = A_i B_j (e_i \times e_j) \quad (10)$$

Perkalian silang dua vektor basis $e_i \times e_j$ dapat dinyatakan menggunakan tensor Levi-Civita ε_{ijk} , sehingga

$$e_i \times e_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} e_k$$

Tensor Levi-Civita yang bersifat antisimetri total terhadap pertukaran indeks. Nilai tensor ini adalah

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & (i, j, k) \text{ permutasi genap } (\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = 1) \\ -1, & (i, j, k) \text{ permutasi ganjil } (\varepsilon_{ikj} = \varepsilon_{kji} = \varepsilon_{jik} = -1) \\ 0, & \text{ada indeks yang sama} \end{cases}$$

Dengan demikian, persamaan (10) dapat ditulis menjadi

$$(\vec{A} \times \vec{B})_k = \varepsilon_{ijk} A_i A_j e_k \quad (11)$$

Hubungan penting antara simbol Levi-Civita dan delta Kronecker dinyatakan oleh identitas

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{nk} & \delta_{nl} & \delta_{nm} \end{vmatrix} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$$

yang sering digunakan dalam penyederhanaan ekspresi aljabar vektor dan tensor. Pendekatan notasi indeks memungkinkan manipulasi aljabar vektor yang lebih ringkas, sistematis, dan mudah digeneralisasi, khususnya dalam fisika teoretis dan mekanika kontinu [4,6,7].

Dalam artikel ini, dilakukan perhitungan hasil perkalian tiga vektor yang meliputi perkalian titik, perkalian silang, serta pembuktian identitas Jacobi dengan menggunakan notasi Einstein, delta Kronecker, dan tensor Levi-Civita. Perhitungan dilakukan secara sistematis dalam notasi indeks. Pendekatan ini diharapkan dapat memperjelas struktur aljabar dari operasi vektor serta menunjukkan keunggulan notasi tensor dalam analisis vektor lanjut [5,6].

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan studi literatur yang berfokus pada pembuktian kesamaan hasil perkalian vektor dengan metode penguraian komponen vektor dengan notasi indeks penerapan konvensi penjumlahan Einstein, serta pemanfaatan sifat-sifat delta Kronecker dan simbol Levi-Civita. Setiap hasil perkalian diverifikasi konsistensinya dengan definisi geometris operasi vektor yang umum digunakan.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini disajikan analisis perhitungan perkalian silang dan perkalian titik dari tiga vektor berdimensi tiga yang dinyatakan dalam sistem koordinat Kartesian. Perhitungan diawali dengan pendekatan komponen vektor, di mana setiap vektor diuraikan ke dalam basis satuan $\hat{i}$, $\hat{j}$, dan $\hat{k}$ untuk memperoleh hasil secara eksplisit. Selanjutnya, perhitungan dilakukan kembali menggunakan notasi indeks dengan bantuan delta kronecker dan simbol Levi-Civita, yang memberikan representasi matematis yang lebih ringkas dan umum. Tahap akhir dari pembahasan ini adalah melakukan verifikasi kesetaraan hasil yang diperoleh dari kedua metode tersebut, sehingga dapat ditegaskan bahwa pendekatan komponen dan notasi indeks memberikan hasil yang konsisten serta saling ekuivalen secara matematis.

3.1. Hasil Perkalian Titik

Hasil perkalian titik yang melibatkan tiga buah vektor $\vec{A}$, $\vec{B}$ dan $\vec{C}$ dinyatakan dalam bentuk

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

Untuk memperoleh bentuk eksplisitnya, perkalian silang dilakukan dengan menyatakan masing-masing vektor dalam komponen Kartesian, diperoleh

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} &= ((A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}) \cdot (C_x \hat{i} + C_y \hat{j} + C_z \hat{k}) \\ &= A_y B_z C_x - A_z B_y C_x + A_z B_x C_y - A_x B_z C_y + A_x B_y C_z - A_y B_x C_z \\ &= A_x B_y C_z + A_y B_z C_x + A_z B_x C_y - (A_x B_z C_y + A_y B_x C_z + A_z B_y C_x) \end{aligned} \quad (11)$$

Bentuk ini menunjukkan bahwa setiap komponen vektor berkontribusi secara simetris terhadap hasil akhir, dengan tanda positif dan negatif yang ditentukan oleh orientasi vektor dalam ruang tiga dimensi.

Secara lebih ringkas, hasil perkalian skalar rangkap tersebut dapat dinyatakan menggunakan notasi indeks dengan simbol Levi-Civita ε_{ijk} dan delta kronecker δ_{ij} yaitu

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\varepsilon_{ijk} A_i B_j \hat{e}_k) \cdot (C_l \hat{e}_l) = (\varepsilon_{ijk} A_i B_j C_l) (\hat{e}_k \cdot \hat{e}_l) = \varepsilon_{ijk} A_i B_j C_l \delta_{kl}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} &= \varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k \\ &= \varepsilon_{123} A_1 B_2 C_3 + \varepsilon_{132} A_1 B_3 C_2 + \varepsilon_{213} A_2 B_1 C_3 + \varepsilon_{231} A_2 B_3 C_1 + \varepsilon_{312} A_3 B_1 C_2 + \varepsilon_{321} A_3 B_2 C_1 \\ &= A_1 B_2 C_3 - A_1 B_3 C_2 + A_2 B_3 C_1 - A_2 B_1 C_3 + A_3 B_1 C_2 - A_3 B_2 C_1 \\ &= A_1 B_2 C_3 + A_2 B_3 C_1 + A_3 B_1 C_2 - (A_1 B_3 C_2 + A_2 B_1 C_3 + A_3 B_2 C_1) \end{aligned} \quad (11.a)$$

Dengan cara yang sama $(\vec{A} \times \vec{C}) \cdot \vec{B} = \varepsilon_{ijk} A_i C_j B_k$

$$\varepsilon_{ijk} A_i C_j B_k = A_1 B_3 C_2 + A_2 B_1 C_3 + A_3 B_2 C_1 - (A_1 B_2 C_3 + A_2 B_3 C_1 + A_3 B_1 C_2) \quad (11.b)$$

Sedangkan $(\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} = \varepsilon_{ijk} C_i A_j B_k$

$$\varepsilon_{ijk} C_i A_j B_k = A_1 B_2 C_3 + A_2 B_3 C_1 + A_3 B_1 C_2 - (A_1 B_3 C_2 + A_2 B_1 C_3 + A_3 B_2 C_1) \quad (11.c)$$

Dari hasil (11) (11.a), (11.b) dan (11.c), diperoleh hubungan sebagai berikut

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} = -(\vec{A} \times \vec{C}) \cdot \vec{B}$$

Hubungan ini menunjukkan bahwa hasil perkalian skalar rangkap bersifat siklik, tetapi mengalami perubahan tanda apabila dua vektor dipertukarkan.

3.2. Hasil Perkalian Silang

Selanjutnya dibahas hasil perkalian silang lanjutan yang melibatkan tiga vektor, yaitu

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} &= ((A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}) \times (C_x \hat{i} + C_y \hat{j} + C_z \hat{k}) \\ &= (A_z B_x C_z - A_x B_z C_z - A_x B_y C_y + A_y B_x C_y)\hat{i} \\ &\quad + (A_z B_y C_z - A_y B_z C_z - A_y B_x C_x + A_x B_y C_x)\hat{j} \\ &\quad + (A_y B_z C_y - A_z B_x C_x - A_z B_y C_y + A_x B_z C_x)\hat{k} \\ &= A_z B_x C_z \hat{i} - A_x B_z C_z \hat{i} - A_x B_y C_y \hat{i} + A_y B_x C_y \hat{i} + A_z B_y C_z \hat{j} - A_y B_z C_z \hat{j} - A_y B_x C_x \hat{j} \\ &\quad + A_x B_y C_x \hat{j} + A_y B_z C_y \hat{k} - A_z B_x C_x \hat{k} - A_z B_y C_y \hat{k} + A_x B_z C_x \hat{k} \\ &= [(A_y C_y + A_z C_z)B_x \hat{i} + (A_x C_x + A_z C_z)B_y \hat{i} + (A_x C_x + A_y C_y)B_z \hat{k}] \\ &\quad - [(B_y C_y + B_z C_z)A_x \hat{i} + (B_x C_x + B_z C_z)A_y \hat{i} + (B_x C_x + B_y C_y)A_z \hat{k}] \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A} \end{aligned} \quad (12)$$

Dengan notasi indeks

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} &= \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} (\vec{A} \times \vec{B})_i C_j \hat{e}_k = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} (\sum_{lm} \varepsilon_{lmi} A_l B_m) C_j \hat{e}_k = \\ &= \sum_{jklm} (\sum_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmi}) A_l B_m C_j \hat{e}_k = \sum_{jklm} (\sum_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm}) A_l B_m C_j \hat{e}_k = \sum_{jklm} (\delta_{jl} \delta_{km} - \\ &\quad \delta_{jm} \delta_{kl}) A_l B_m C_j \hat{e}_k = \sum_{jklm} (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) A_l B_m C_j \hat{e}_k = \sum_{jklm} (\delta_{jl} \delta_{km} A_l B_m C_j \hat{e}_k - \delta_{jm} \delta_{kl} A_l B_m C_j \hat{e}_k) \end{aligned}$$

Jika indeks j diganti l dan k diganti m pada suku pertama, serta j diganti m dan k diganti l pada suku kedua, maka

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} &= \delta_{ll} \delta_{mm} A_l B_m C_l \hat{e}_m - \delta_{mm} \delta_{ll} A_l B_m C_m \hat{e}_l \\ &= (\sum_l A_l C_l) (\sum_m B_m \hat{e}_m) - (\sum_m B_m C_m) (\sum_l A_l \hat{e}_l) \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A} \end{aligned} \quad (12.a)$$

diperoleh hasil yang identik antara persamaan (12) dengan (12.a)

Dengan cara yang sama, diperoleh pula

$$\begin{aligned} (\vec{B} \times \vec{C}) \times \vec{A} &= \delta_{ll} \delta_{mm} B_l C_m A_l \hat{e}_m - \delta_{mm} \delta_{ll} B_l C_m A_m \hat{e}_l \\ &= \left(\sum_l B_l A_l \right) \left(\sum_m C_m \hat{e}_m \right) - \left(\sum_m C_m A_m \right) \left(\sum_l B_l \hat{e}_l \right) = (\vec{B} \cdot \vec{A})\vec{C} - (\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B} \end{aligned} \quad (12.b)$$

Dan

$$\begin{aligned} (\vec{C} \times \vec{A}) \times \vec{B} &= \delta_{ll} \delta_{mm} C_l A_m B_l \hat{e}_m - \delta_{mm} \delta_{ll} C_l A_m B_m \hat{e}_l \\ &= \left(\sum_l C_l B_l \right) \left(\sum_m A_m \hat{e}_m \right) - \left(\sum_m A_m B_m \right) \left(\sum_l C_l \hat{e}_l \right) = (\vec{C} \cdot \vec{B})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \end{aligned} \quad (12.c)$$

Dengan menjumlahkan ketiga hasil tersebut (12.a), (12.b), dan (12.c), diperoleh

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} + (\vec{B} \times \vec{C}) \times \vec{A} + (\vec{C} \times \vec{A}) \times \vec{B} \\ = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{A})\vec{C} - (\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B} + (\vec{C} \cdot \vec{B})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Hasil ini dikenal sebagai Identitas Jacobi, yang merupakan sifat fundamental dalam aljabar vektor. Identitas ini menunjukkan konsistensi struktur operasi perkalian silang serta memiliki peranan penting dalam berbagai bidang fisika teoretis, seperti mekanika klasik dan elektromagnetika.

4. KESIMPULAN

Hasil perkalian titik tiga vektor dalam ruang tiga dimensi dinyatakan oleh persamaan (11) dan (11.a), sedangkan hasil perkalian silangnya dinyatakan dalam persamaan (12) dan (12.a). Dari persamaan-

persamaan tersebut didapat bahwa hasil perkalian dengan kedua metode diperoleh hasil yang sama. Hanya saja, teknik perkalian vektor menggunakan notasi indeks, delta Kronecker dan simbol Levi-Civita lebih ringkas. Harapannya pendekatan ini tidak hanya memperkaya pemahaman matematis terhadap operasi vektor, tetapi juga relevan untuk diterapkan dalam pembelajaran.

REFERENSI

- [1] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4th ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2017.
- [2] J. B. Marion and S. T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 5th ed. Belmont, CA, USA: Brooks/Cole, 2004.
- [3] G. B. Arfken, H. J. Weber, and F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*, 7th ed. Boston, MA, USA: Academic Press, 2013.
- [4] A. Einstein, *The Meaning of Relativity*. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1955.
- [5] M. L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, 3rd ed. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2006.
- [6] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. New York, NY, USA: Wiley, 1999.
- [7] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics*, 3rd ed. San Francisco, CA, USA: Addison-Wesley, 2002.
- [8] M. T. Vaughn, "Introduction to tensor calculus and index notation," *American Journal of Physics*, vol. 56, no. 7, pp. 607–613, 1988.
- [9] R. Aris, *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. New York, NY, USA: Dover Publications, 1989.
- [10] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon Press, 1976.
- [11] J. R. Taylor, *Classical Mechanics*, University Science Books, 2005.
- [12] M. R. Spiegel, *Vector Analysis*, McGraw-Hill, 1974.